2003학년도 대학수학능력시험 문제지

제 2 교시

수리 영역

자 연 계 | 성명 김새뮤엘 | 수험번호 | 짝수형 | 1

- 먼저 수험생이 선택한 계열의 문제인지 확인하시오.
- 문제지에 성명과 수험 번호를 정확히 기입하시오.
- 답안지에 수험 번호, 응시 계열, 문형, 답을 표기할 때에는 반드시 '수험생이 지켜야 할 일'에 따라 표기하시오.
- 주관식 답의 숫자에 0이 포함된 경우, 0을 OMR 답안지에 반드시 표기해야 합니다.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점 또는 3점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{16}$ 을 간단히 하면? [2점]

① $\sqrt{2}$　② $2\sqrt{2}$　③ $2\sqrt[3]{2}$　④ 2　⑤ 4

$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{16}$

$= 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{4 \times \frac{1}{6}}$

$= 2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 2^1 = 2$

2. 이차방정식 $x^2-5x-2=0$ 의 두 근을 α와 β라 할 때, $\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}$ 의 값은? [2점]

① [illegible]　② 3　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{5}{2}$　⑤ $\frac{7}{4}$

근과 계수사이 관계...

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\cdot\beta=-2$

Given $\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1} = \frac{\alpha+\beta+1+1}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}$

$= \frac{5+1+1}{5-2+1}$

$= \frac{6+1}{4} = \frac{7}{4}$

3. 두 벡터 $\vec{a}=(-1, 3)$과 $\vec{b}=(2, 1)$에 대하여 내적 $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$의 값은? [2점]

① 19　② 17　③ 15　④ 13　⑤ 11

$\vec{a}+\vec{b} = (-1, 3)+(2, 1)$

$= (-1+2, 3+1) = (1, 4)$

$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = (-1, 3)(1, 4)$

$= -1+12 = 11$

4. 두 행렬 $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$과 $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$이 있다. 두 실수 a와 b가 $(E+2A)^2=aE+bA$ 를 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [2점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

Given

$(E+2A)^2 = E^2+2E\cdot A+2A\cdot E+4A^2$

$= E+4A^2+4A$ ∵ $E^2=E$.

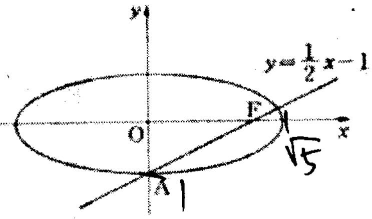
$A^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$.

$= 5E+4A$

∴ $a=5$　$b=4$

$a+b=9$.

5. 그림과 같이 원점을 중심으로 하는 타원의 한 초점을 F라 하고, 이 타원이 y축과 만나는 한 점을 A라고 하자. 직선 AF의 방정식이 $y=\frac{1}{2}x-1$인 때, 이 타원의 장축의 길이는? [2점]



✓ ① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ 5
④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad A(0.-b)$$

$\therefore b=1.$

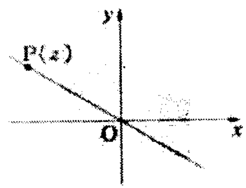
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{1}=1.$$

$\sqrt{a^2-1}=2.$ ←(초점)

$a=\sqrt{5}$

$\therefore$ 길이는 $2\sqrt{5}$.

6. 복소평면 위에서 어떤 복소수 z를 나타내는 점 P의 위치가 그림과 같을 때, <보기> 중에서 직선 OP 위에 있는 복소수를 모두 고르면? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [2점]



<보 기>

ㄱ. $\bar{z}$ ㄴ. $-z$ ㄷ. $\frac{1}{z}$ ㄹ. $-\frac{1}{\bar{z}}$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄷ
✓ ④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

let $z=a+bi$ 직선위에 있기 위해 $\frac{b}{a}=$ 일정.

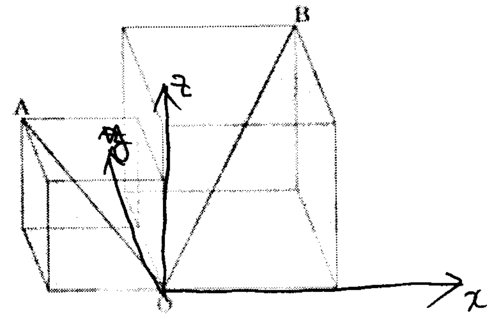
ㄱ. $\bar{z}=a-bi \Rightarrow -\frac{b}{a}$ (X)

ㄴ. $-z=-a-bi \Rightarrow \frac{b}{a}$ (O)

ㄷ. $\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{(a^2-b^2)} \Rightarrow -\frac{b}{a}$ (X)

ㄹ. $\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{a-bi}=\frac{a+bi}{a^2-b^2} \Rightarrow \frac{b}{a}$ (O)

7. 한 모서리의 길이가 각각 2와 3인 두 정육면체를 그림과 같이 꼭지점 O와 두 모서리가 겹치도록 붙여 놓았다. 두 정육면체의 대각선 OA와 OB에 대하여 $\angle AOB$의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값은? [2점]



✓ ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

x.y.z 좌표에 mapping 시키면..

A(−2. 2. 2)
B(3. 3. 3)

$\overline{AB}=\sqrt{5^2+1+1}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

$\overline{OA}=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$

$\overline{OB}=\sqrt{9+9+9}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

c, a, b, θ

cosθ 제2법칙: $\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}=\frac{12+\cancel{27}-\cancel{27}}{2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$

8. 함수 $f(x)$는 연속함수이고 모든 실수 x에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$f(x)-2\int_0^x e^t f(t)\,dt=1$$

이때, $f''(0)$의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이고, $f''(x)$는 $f(x)$의 이계도함수이다.) [3점]

① 2 ② 4 ✓ ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$f(x)=1+2\int_0^x e^t\cdot f(t)\,dt$ … ⓐ

$f'(x)=0+2\cdot e^x\cdot f(x).$

$f''(x)=2\cdot e^x\cdot f(x)+2\cdot e^x\cdot f'(x)$

$=2\cdot e^x\cdot f(x)+2\cdot e^x(2\cdot e^x\cdot f(x))$

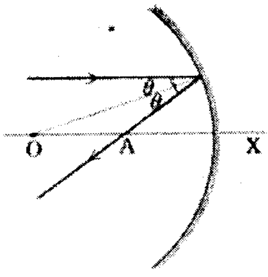
$=2\cdot e^x\cdot f(x)+4\cdot e^{2x}\cdot f(x)$

$f''(0)=6f(0)$

$f(0)=1.$ from ⓐ

$\therefore f''(0)=6.$

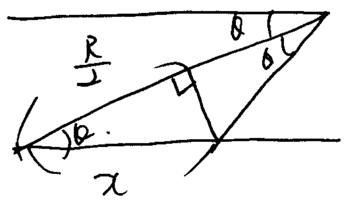
9. 중심이 O이고 반지름의 길이가 R인 구면거울이 있다. 그림과 같이 OX 축에 평행하게 입사된 빛이 거울에 반사된 후 축과 만나는 점을 A라고 할 때, 선분 OA의 길이는? (단, 입사각과 반사각의 크기는 θ로 같고, $0° < \theta < 20°$ 이다.) [2점]



✓ $\frac{R}{2\cos\theta}$ ② $\frac{R}{2\sin\theta}$

③ $R(1-\cos\theta)$ ④ $\frac{R}{2\cos 2\theta}$

⑤ $\frac{R}{2\sin 2\theta}$



$\frac{\frac{R}{2}}{x} = \cos\theta$

$\therefore x = \frac{R}{2\cdot\cos\theta}$

10. 제 1 사분면 위의 점 $P_0(x_0, y_0)$이 주어졌을 때, 자연수 n에 대하여 점 $P_n(x_n, y_n)$을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{pmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2n-2} \\ y_{2n-2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{2n} \\ y_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{pmatrix}$$

이때 점 P_{2003}의 좌표는? [3점]

① (x_0, y_0)

✓ $(x_0, -y_0)$

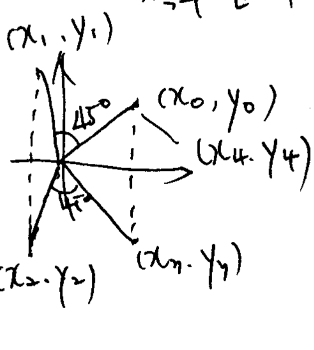
③ $\left(\frac{x_0-y_0}{\sqrt{2}}, \frac{x_0+y_0}{\sqrt{2}}\right)$

④ $\left(\frac{x_0+y_0}{\sqrt{2}}, \frac{x_0-y_0}{\sqrt{2}}\right)$

⑤ $\left(\frac{x_0+y_0}{\sqrt{2}}, \frac{-x_0+y_0}{\sqrt{2}}\right)$

홀수번째꺼는 그전꺼에 45° 회전.

짝수번째꺼는 그 전꺼의 x축 대칭.



∴ 4의 배수이면 처음자리.

2003은 4의배수보다 3큰수이므로

x_3, y_3의자리.

∴ 처음 것의 x축대칭인 $(x_0, -y_0)$

11. A와 B 두 팀이 축구 경기에서 연장전까지 0 : 0으로 승부를 가리지 못하여 승부차기를 하였다. 각 팀당 5명의 선수가 A 팀부터 시작하여 1명씩 교대로 승부차기를 할 때, B 팀이 5 : 4로 이길 확률은? (단, 각 선수의 승부차기는 독립시행이고 성공할 확률은 0.8이다.) [3점]

① 0.2×0.8^8 ② 0.8^8 ③ 0.2×0.8^9

✓ 0.8^9 ⑤ 0.8^{10}

못넣는선수 고르기 $\frac{1}{10}$

성공 9번. 실패 1번. 팀배열 $\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{10} \times 0.\cancel{2} \times (0.8)^9 \times \frac{1}{\cancel{2}} = (0.8)^8$

12. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$h(x) = \frac{1}{3}f(x) + \frac{2}{3}g(x)$$

<보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? [3점]

<보 기>

ㄱ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 어떤 점에서 만나면 $y=h(x)$의 그래프는 그 교점을 지난다.

ㄴ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 모두 y축에 대하여 대칭이면 $y=h(x)$의 그래프도 y축에 대하여 대칭이다.

ㄷ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 모두 일대일 대응이면 $y=h(x)$도 일대일 대응이다.

① ㄱ ✓ ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 만난다.. 같다. $f(x)=g(x)$ 이면 대입하면 $h(x)=f(x)$...

ㄴ. 우함수 + 우함수 → 우함수

ㄷ. $f(x)=3x$ $g(x)=-\frac{3}{2}x$ 이면

일대일안된다 ∴ $h(x)=0$.

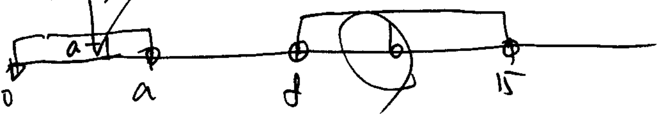
13. 실수 a에 대하여 부등식

$$(x-8)(x-15)(x-a)<0$$

을 만족시키는 자연수 x의 개수를 $f(a)$라고 할 때, $f(a)$의 최소값은? [3점]

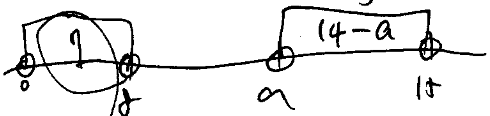
① 14 ② 12 ③ 10 ④ 8 ⑤ 6

i) $a<8$ $\Rightarrow f(a)=a+5$.



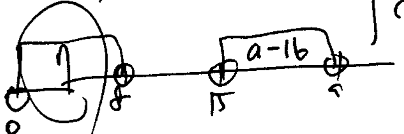
ii) $8<a<15$

$f(a)=21-a$.



iii) $a>15$

$f(a)=a-9$.



14. n이 자연수일 때, <보기>의 부등식 중 항상 성립하는 것을 모두 고르면? [3점]

<보 기>

ㄱ. $\log_2(n+3)>\log_2(n+2)$

ㄴ. $\log_2(n+2)>\log_3(n+2)$

ㄷ. $\log_2(n+2)>\log_3(n+3)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\log_2 x$는 단조 증가.

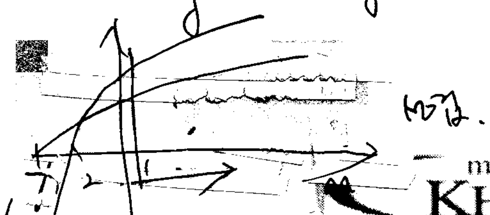
$n+3>n+2$ ∴ (o).

ㄴ. $\log_2(n+2)>\log_3(n+2)$

$\dfrac{\cancel{\log(n+2)}}{\log 2}>\dfrac{\cancel{\log(n+2)}}{\log 3}$ (o)

$\log 2<\log 3$

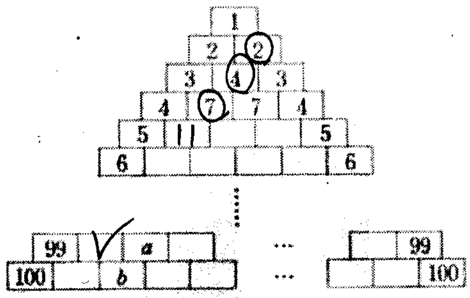
ㄷ.



15. 그림과 같이 제1행에는 1개, 제2행에는 2개, …, 제100행에는 100개의 직사각형을 나열하고 그 안에 다음과 같은 규칙으로 수를 써 넣었다.

(규칙 1) 각 행의 양쪽 끝 직사각형에는 1부터 100까지의 자연수를 순서대로 써 넣는다.

(규칙 2) 각 행의 안쪽 직사각형에는 바로 위 행의 인접한 직사각형에 쓰인 두 수의 합을 써 넣는다.



이때, $b-a$의 값은? [3점]

① 4852 ② 4858 ③ 4864 ④ 4872 ⑤ 4878

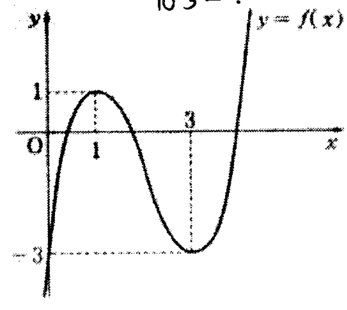
2, 4, 7, 11 …
2 3 4

∴ $b-a=2+\sum_{k=1}^{98-1}(k+1)$

$=2+97+\dfrac{97\cdot 98}{2}$

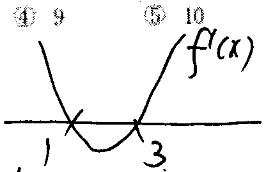
$=4852$.

16. 그림과 같이 삼차함수 $y=f(x)$가 극대값 $f(1)=1$과 극소값 $f(3)=-3$을 가지며, $f(0)=-3$이다. 이때, $\int_0^3|f'(x)|\,dx$의 값은? [3점]



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(1)=0$ $f'(3)=0$.



$\int_0^3|f'(x)|dx$

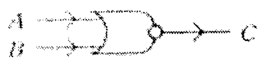
$=\int_0^1 f'(x)\,dx-\int_1^3 f'(x)\,dx$

$=\Big[f(x)\Big]_0^1-\Big[f(x)\Big]_1^3$

$=f(1)-f(0)-f(3)+f(1)$

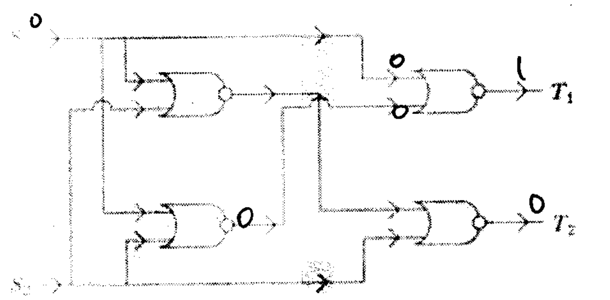
$=8$.

17. [그림 1]의 연산장치는 입력값이 A와 B일 때 출력값 C를 표에 주어진 것과 같이 결정한다. 이 연산장치 4개를 [그림 2]와 같이 연결하였다.



[그림 1]

A	B	C
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



[그림 2]

출력값이 $T_1=1$, $T_2=0$ 이 되는 입력값 S_1, S_2를 <보기> 중에서 모두 고르면? [3점]

<보 기>

ㄱ. $S_1=0$, $S_2=0$　　ㄴ. $S_1=0$, $S_2=1$

ㄷ. $S_1=1$, $S_2=0$　　ㄹ. $S_1=1$, $S_2=1$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

그림•1은 NOR Gate라고 불리는회로로 둘다 0이 입력될때만 1을 내놓는다.

$\therefore T_1=1$ 이되려면 (S_1은 무조건 0. S_2는 0이면 안된다.

다른조건은 없으나마나...

(다) ~~AN·BM~~ 산술-기하 평균 이용

$$\frac{\overline{AN}^2+\overline{BM}^2}{2} \geq \sqrt{\overline{AN}^2\cdot\overline{BM}^2}$$

$$\frac{\frac{5}{4}a^2}{2} \geq \overline{AN}\cdot\overline{BM}$$

$$\frac{5}{8}a^2 \geq \overline{AN}\cdot\overline{BM}$$

18. 다음은 세 자연수 $a, b, c\ (a<b<c)$에 대하여

$$P=(b^2-a^2)(c^2-a^2)(c^2-b^2)$$

이 12의 배수임을 증명한 것이다.

> <증명>
>
> a, b, c를 각각 2로 나누었을 때 나머지는 $\boxed{(가)}$ 같다. 이 중 나머지가 같은 두 수를 a와 b라고 하면 b^2-a^2은 4의 배수이다.
>
> 그러므로 P도 4의 배수이다. ……………… ㉠
>
> 다음으로, a^2, b^2, c^2을 3으로 나누었을 때 나머지를 알아보자.
>
> a^2, b^2, c^2을 각각 3으로 나눈 나머지는 $\boxed{(나)}$ 이므로 a^2, b^2, c^2 중에는 3으로 나눈 나머지가 같은 것이 적어도 2개가 있다.
>
> 그러므로 P는 3의 배수이다. ……………… ㉡
>
> ㉠과 ㉡으로부터 P는 12의 배수이다.

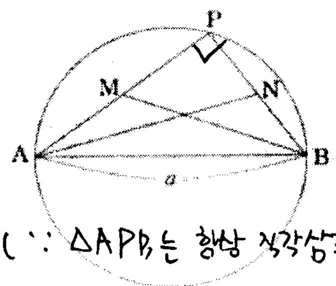
→0 아니면 1 이니까 적어도 2개.

→제곱해서 3으로 나누면 2가 남는 게 없으면 내가 맞는거 사줄께.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은? [2점]

	(가)	(나)
①	모두	0 또는 1
②	모두	1 또는 2
③	적어도 2개가	0 또는 1
④	적어도 2개가	0 또는 2
⑤	적어도 2개가	1 또는 2

19. 그림과 같이 길이가 a인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위를 움직이는 점 P가 있다. 선분 PA와 선분 PB의 중점을 각각 M과 N이라고 하면,



$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=\boxed{(가)}$ 이다. a^2 · (∵ △APB는 항상 직각삼각형)

따라서 $\overline{AN}^2+\overline{BM}^2=\boxed{(나)}$ 이므로, $\overline{AN}\cdot\overline{BM}$의 최대값은 $\boxed{(다)}$ 이다.

(나) $\overline{AN}^2+\overline{BM}^2=\overline{PN}^2+\overline{PA}^2+\overline{PM}^2+\overline{PB}^2$

$=\overline{PA}^2+\overline{BP}^2+(\overline{PN}^2+\overline{PM}^2)$

$PN=\frac{1}{2}\overline{PA}$

$PM=\frac{1}{2}\overline{PB}$

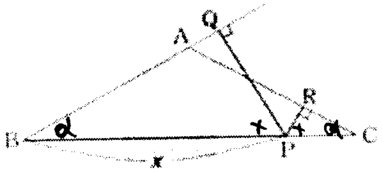
$=\frac{5}{4}\overline{PA}^2+\frac{5}{4}\overline{PB}^2$

$=\frac{5}{4}(\overline{PA}^2+\overline{BP}^2)$

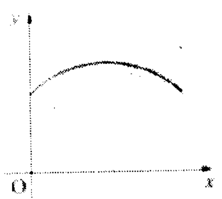
위의 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

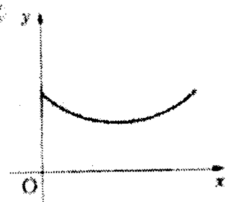
	(가)	(나)	(다)
①	a^2	$\frac{5}{4}a^2$	$\frac{\sqrt{5}}{2}a^2$
②	a^2	$\frac{5}{4}a^2$	$\frac{5}{8}a^2$
③	a^2	$\frac{3}{2}a^2$	$\frac{3}{4}a^2$
④	$2a^2$	$\frac{3}{2}a^2$	$\frac{\sqrt{5}}{2}a^2$
⑤	$2a^2$	$\frac{5}{4}a^2$	$\frac{5}{8}a^2$

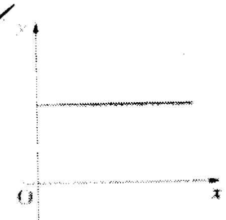
20. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 인 이등변삼각형 ABC 의 변 BC 위를 움직이는 점 P가 있다. 점 P에서 변 AB 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 Q, 변 AC 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 R 라고 하자.

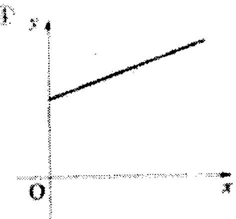


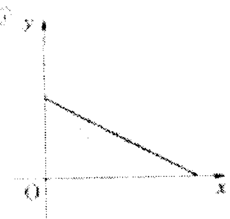
$\overline{BP}=x$ 와 $\overline{PQ}+\overline{PR}=y$ 에 대하여 y 를 x 의 함수로 나타낼 때, 그 그래프의 개형은? [3점]

①


②


③ ✓


④


⑤


$PQ = x\cdot\sin\alpha.$

$PR = (\overline{BC}-x)\cdot\sin\alpha.$

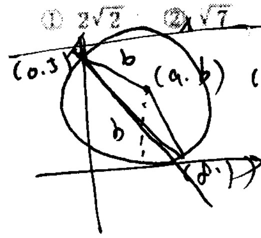
$\therefore PQ+PR = \overline{BC}\cdot\sin\alpha.$

x와상관 없이 각도 α 와 상관있다

그러므로 상수함수.

21. 좌표평면에서 중심이 (a, b) 이고 x 축에 접하는 원이 두 점 A(0, 5)와 B(8, 1)을 지난다. 이때, 원의 중심 (a, b) 와 직선 AB 사이의 거리는? (단, $0\leq a\leq 8$) [3점]

① $2\sqrt{2}$　② $\sqrt{7}$　③ $\sqrt{6}$　④ $\sqrt{5}$　⑤ $\sqrt{3}$



$(0.5)\to b^2 = a^2+(5-b)^2$

i) $\to a^2+25-10b=0.$

$(8.1)\to b^2=(8-a)^2+(1-b)^2.$

ii) $\to a^2-16a+64+1-2b=0.$

직선의방정식 $y=-\frac{1}{2}x+5$　$x+2y-10=0.$

$\therefore (a\cdot b)$로부터의거리 $d=\dfrac{|a+2b-10|}{\sqrt{1+4}}$

i) − ii) $\to 16a-8b-40=0.$

$2a-b-5=0.$　$b=2a-5.$ → ii)

$a^2-16a+65-4a+10=0.$

$a^2-20a+75=0$

$(a-15)(a-5)=0.$　$\therefore a=5.$　$\therefore b=5$　$\therefore d=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}.$

22. 겨울철에 바람이 불면 바람이 불지 않을 때보다 더 춥게 느껴진다. 이와 같이 실제 느껴지는 온도를 체감온도라고 하며, 기온을 t, 풍속을 v, 복사량을 I 라고 할 때 체감온도 T 는 다음과 같다고 한다.

$$T = t-4\sqrt{v}+12I$$

어느 해의 대학수학능력시험 날, 어떤 지역의 오후의 기온은 오전보다 6도 상승했지만 오후의 풍속이 오전의 4배가 되어 체감온도는 변하지 않았다. 이 지역의 그날 오전의 풍속은? (단, 그날 오전과 오후의 복사량 I 의 값은 같았다.) [3점]

① 2　② 2.25　③ 2.5
④ 2.75　⑤ 3

$\cancel{t}-4\sqrt{v}+\cancel{12I}=(\cancel{t}+6)-4\sqrt{4v}+\cancel{12I}$

$-4\sqrt{v}=6-8\sqrt{v}.$

$\cancel{4}\sqrt{v}=\cancel{6}\ \frac{3}{2}$

$v=\frac{9}{4}=2.25.$

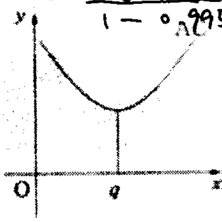
3. 광통신에서는 광섬유를 이용하여 신호를 먼 곳까지 보낸다. 신호가 광섬유를 1 km 지날 때마다 신호의 세기는 1 km 전의 세기의 99%가 된다고 하자. 신호의 세기가 처음 세기의 $\frac{1}{2}$이 되는 곳에 중계소를 설치하려고 할 때, 처음 신호를 보내는 곳에서 중계소까지 광섬유의 길이는 약 몇 km인가? (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 9.9 = 0.9956$ 으로 계산한다.) [3점]

① 68 ② 78 ③ 88 ④ 98 ⑤ 108

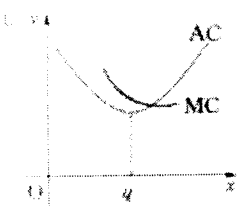
$(0.99)^x = \frac{1}{2}$. ← take log.

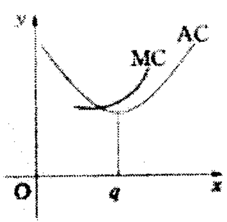
$x \cdot \log \frac{9.9}{10} = -\log 2$ $\quad x = \frac{-\log 2}{\log 9.9 - \log 10} = \frac{0.3010}{1 - 0.9956} = 68.4$

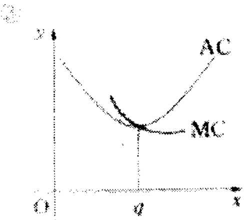
4. 어떤 제품의 생산량이 x 일 때 생산비를 $f(x)$라고 하자. 이때, $\frac{f(x)}{x}$를 평균생산비라 하고, AC로 나타낸다. 또, $f(x)$가 미분가능하면 $f'(x)$를 생산량이 x일 때의 한계생산비라 하고 MC로 나타낸다.

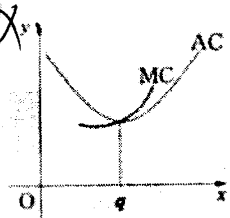


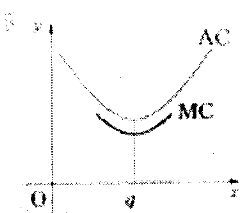
평균생산비 $\mathrm{AC} = \frac{f(x)}{x}$ 의 그래프가 그림과 같고 $x = q$ 에서 극소값을 가질 때, $x = q$ 근방에서 한계생산비 $\mathrm{MC} = f'(x)$ 의 그래프의 개형은? [3점]

①


②


③


④


⑤


$AC(x) = \frac{f(x)}{x}$

$f(x) = AC(x) \cdot x$.

$MC = f'(x) = AC'(x) \cdot x + AC(x)$.

$AC'(x)$는 q에서 0. 그전엔 (−). 그후 (+)

∴ q에서 AC 나타남. 그 이후는 AC보다 크다.

주관식 문항 (25~30)

25. 전체집합 U의 두 부분집합 A와 B에 대하여

$$A \cap B^C = A, \quad n(A) = 9, \quad n(B) = 14$$

일 때, $n(A \cup B)$의 값을 구하시오. (단, $n(X)$는 집합 X의 원소의 개수이다.) [2점]

$A \subset B^C$ $\quad (\because A \cap B^C = A)$

U A 9 B 14

$A \cap B = \emptyset$

$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

$\because n(A \cap B) = 0$

$\therefore 9 + 14 = 23.$

26. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1+(-1)^n}{3} \right\}^n$ 의 합을 S라고 할 때, $20S$의 값을 구하시오. [3점]

$a_n = \left(\frac{1+(-1)^n}{3} \right)^n$ 이라면

홀수는 0. 짝수는 $\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

$a_{2n-1} = 0$. $\quad a_{2n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$.

$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{9-4}{9}} = \frac{4}{5}$

$\therefore 20S = \frac{4}{5} \times 20 = 16.$

27. 다항식 $f(x)=x^3+x^2+2x+1$ 에 대하여 $f(x)$ 를 $x-a$ 로 나누었을 때의 나머지를 R_1, $f(x)$ 를 $x+a$ 로 나누었을 때의 나머지를 R_2 라고 하자. $R_1+R_2=6$ 일 때, $f(x)$ 를 $x-a^2$ 으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. [3점]

나머지정리

$R_1=f(a)$ $\quad f(a)=a^3+a^2+2a+1$

$R_2=f(-a)$ $\quad + \; f(-a)=-a^3+a^2-2a+1$

$\therefore f(a)+f(-a)=6$ $\quad \cancel{6}=2a^2+2$ $\quad a=\pm\sqrt{2}$

$f(x)=(x-a^2)Q(x)+\cancel{\ }+R$

$f(x)=(x-2)Q(x)+R$

$f(2)=R$

$R=8+4+4+1=17$

28. 방정식 $x^3=1$ 의 한 허근을 ω 라고 할 때, 자연수 n 에 대하여 함수 $f(n)$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$f(n)=\frac{\omega^{2n}}{\omega^n+1}$$

이때, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(20)$ 의 값을 구하시오. [3점]

$x^3=1$. $(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\therefore \omega^2+\omega+1=0$ ($\because \omega$ 허근.)

$f(1)=\dfrac{\omega^2}{\omega+1}=\dfrac{-\omega-1}{\omega+1}=-1$

$f(2)=\dfrac{\omega^4}{\omega^2+1}=\dfrac{\omega\cdot\omega^3}{-\omega}=-1$

$f(3)=\dfrac{\omega^6}{\omega^3+1}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

$f(4)=\dfrac{\omega^8}{\omega^4+1}=\dfrac{\omega^2}{\omega+1}=f(1)=-1$

$f(5)=\dfrac{\omega^{10}}{\omega^5+1}=\dfrac{\omega^1}{\omega^2+1}=-1=f(2)$

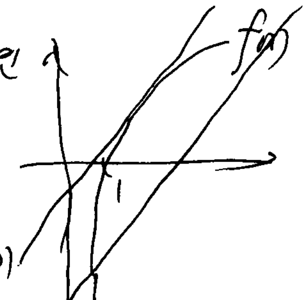
$\therefore f(1)+\cdots f(20)=7\cdot f(1)+7f(2)+6f(3)=-14+3=-11$

29. x 에 대한 방정식 $\ln x-x+20-n=0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 자연수 n 의 개수를 구하시오. [3점]

$\ln x=x-20+n$.

$f(x)=\ln x$

$g(x)=x-20+n$) 이라하면



접하는 부분 이상으로 올라가면 $g(x)$ 근이 없다.

$f'(x)=\dfrac{1}{x}=1$ $\quad x=1$

(1.0) 에서 접선의 기울기가 1인것이 생긴다.

그러므로 n은 $1\sim18$ 까지 가능하다.

$\because 19$ 일때는 접한다. 18개.

30. 다음은 첫째 항이 $a-15d$, 공차가 d, 항의 개수가 31 인 등차수열이다.

$$a-15d,\ \cdots,\ a-d,\ a,\ a+d,\ \cdots,\ a+15d$$

위 항들의 값의 표준편차를 σ 라고 할 때, $\dfrac{\sigma}{d}$ 의 값을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하시오.

(단, $d>0$ 이고 $\sqrt{5}=2.24$ 로 계산한다.) [3점]

표준편차 $=\sqrt{\Sigma(x-평균)^2}$

평균 $=a$.

$\therefore \sqrt{\dfrac{\sum_{k=-15}^{15}(kd)^2}{31}}$

$=d\sqrt{\dfrac{2\cdot\sum_{k=1}^{15}(k^2)}{31}}$

$=d\cdot\sqrt{\dfrac{2\cdot 15\cdot 16\cdot 31}{6\cdot 31}}=d\cdot\sqrt{5\cdot 16}=4d\sqrt{5}$

$\dfrac{\sigma}{d}=4\sqrt{5}=4\times 2.24$

$\boxed{=8.96}$

• 확인 사항

○ 문제지와 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 문제지와 답안지를 함께 제출합니다. 답안지는 오른쪽에, 문제지는 왼쪽에 놓으시오.